

IB 552 - 78 / 28

Transformation der Freiheitsgrade
des Syntelmann

Dr. Claus Thiessen

Freigabe: Die Bearbeiter:
Dr. Claus Thiessen

Unterschriften:

Claus Thiessen

Der Abteilungsleiter:
Dr. Hirzinger
Der stellv. Institutsdirektor:
Dr. Hirzinger
Der Institutsdirektor:

Hirzinger

i. V. Hirzinger

Dieser Bericht enthält:

26 Blatt davon

7 Bilder

 Diagramme

Ort Oberpfaffenhofen

Datum: Dez. 78

Bearbeiter: Dr. Thiessen Zeichen:

1. Transformation der Freiheitsgrade des Syntelmann

Definitionen:

Der Syntelmann ist ein Industrieroboter mit 7 Freiheitsgraden des rechten Armes, der hier ausschließlich betrachtet wird. Einer dieser Freiheitsgrade, die Greifzange, wird im folgenden nicht betrachtet; um die Anschaulichkeit zu fördern, wird deshalb eine ausgestreckte Hand mit abstehendem Daumen zugrundegelegt. Die Ruhestellung des Roboters sei definiert durch einen nach unten hängenden Oberarm, einem nach vorne gerichteten Unterarm und eine ebenfalls nach vorne ausgestreckte Hand mit nach oben gerichtetem Daumen über der Handwurzel (Abb. 1). Die 6 Freiheitsgrade seien folgendermaßen definiert im (x, y, z) Koordinatensystem der Abb. 1:

- | | | | |
|----------|--------------------------|------------|------------------------|
| ϕ_1 | = Schulterwinkel um | $+\vec{y}$ | (Oberarm nach vorne), |
| ϕ_2 | = Achsenwinkel um | $-\vec{x}$ | (Oberarm nach innen), |
| ϕ_3 | = Oberarm-Drehwinkel um | $+\vec{z}$ | (Unterarm nach innen), |
| ϕ_4 | = Ellbogenwinkel um | $+\vec{y}$ | (Unterarm nach oben), |
| ϕ_5 | = Unterarm-Drehwinkel um | $+\vec{x}$ | (Daumen nach links), |
| ϕ_6 | = Handgelenkwinkel um | $-\vec{z}$ | (Finger nach rechts). |

Nach diesen Winkeln werden auch die Achsen 1 bis 6 nummeriert und richtungsmäßig definiert (nummerierte Pfeile in Abb. 1). Außerdem seien folgende Punkte definiert:

- | | |
|-------|----------------------------------------------|
| P_1 | = Schnittpunkt der Achsen 1 und 2, |
| P_2 | = Schnittpunkt der Achsen 2 und 3, |
| P_3 | = Punkt auf der Achse 3 in Höhe der Achse 4, |
| P_4 | = Schnittpunkt der Achsen 4 und 5, |
| P_6 | = Schnittpunkt der Achsen 5 und 6. |

Davon wird P_1 als Koordinatenursprung für alle indizierten (x, y, z) -Werte (raumfest) und P_6 als Koordinatenursprung aller (ξ, η, ζ) -Werte (handfest) verwendet.

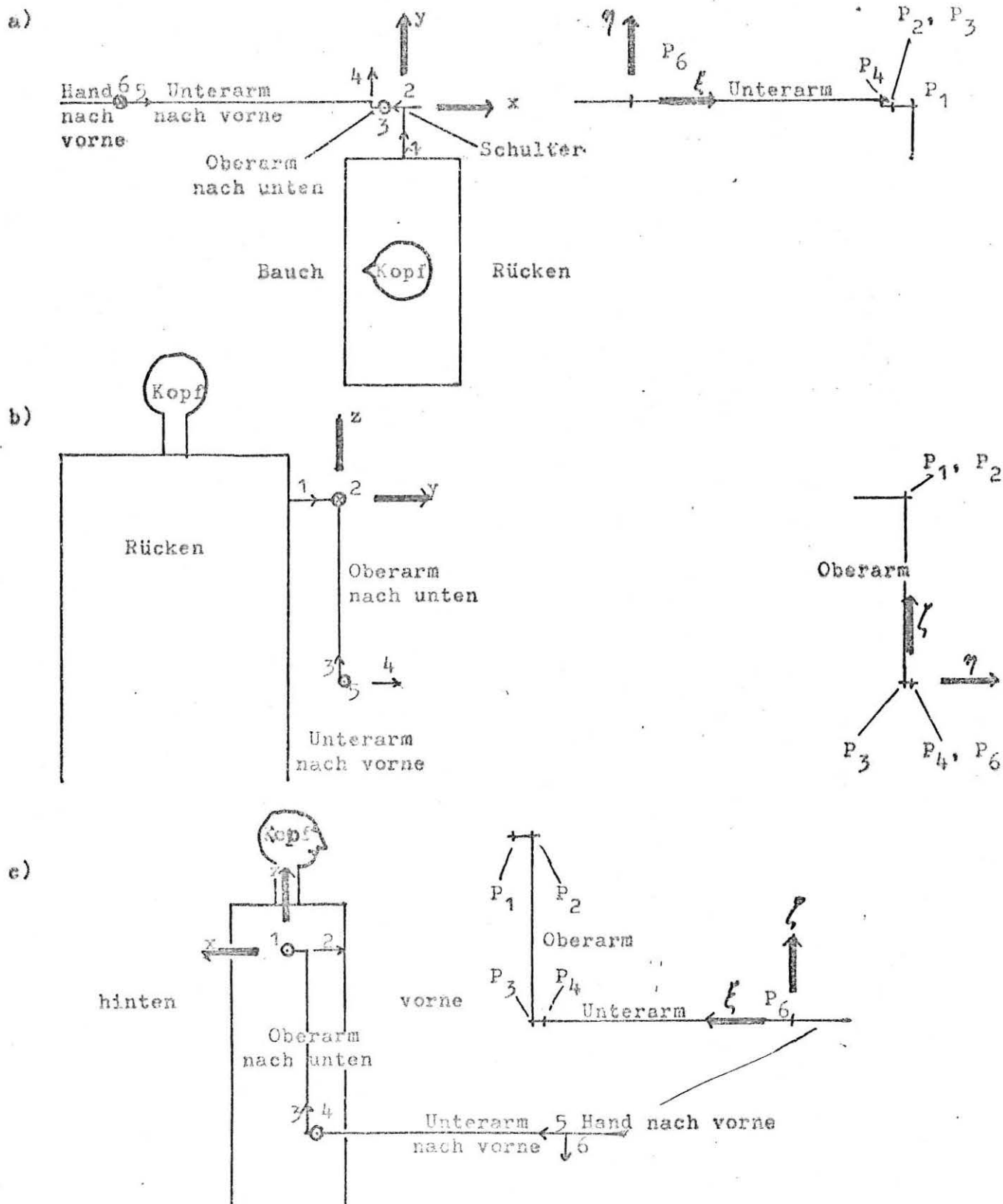


Abb. 1 Syntelmann (symbolisch) in Ruhestellung,
a) in Aufsicht, b) in Rückenansicht und c) in Seitenansicht.
Links im Bild ist das (x, y, z) -System dargestellt, die dort mit Zahlen bezeichneten Pfeile definieren die Drehachsen.
Rechts im Bild ist das (ξ, η, ζ) -System dargestellt und sind die Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ definiert. P_1 ist hier Koordinatenursprung für x, y, z , P_6 ist Koordinatenursprung für ξ, η, ζ .

Abmessungen:

Alle Abmessungen werden in cm, alle Winkel in Grad angegeben.
Benachbarte Gelenke stehen senkrecht aufeinander.

Die Lage des Oberarms beträgt $l_o = 32,5$,
die Lage des Unterarms beträgt $l_u = 44,0$,
der Abstand zw. P_1 und P_2 (Schulterversetzung) betr. $a_s = 3,5$,
der Abstand von P_3 zur Achse 4 (Ellbogenvers.) betr. $a_e = 2,0$,
der Abstand von P_4 zur Achse 3 (Unterarmvers.) betr. $a_u = 1,0$.

Im Koordinatensystem der Hand soll ein beliebiger Punkt
(ξ_o, η_o, ζ_o) als Bezugspunkt für Translationen und Drehungen
definierbar sein.

Definition der Drehoperatoren D_x, D_y und D_z :

Im folgenden werden häufig Koordinatentransformationen durchgeführt, die mit der Drehung der Roboter Gelenke oder des Koordinatensystems zusammenhängen. Dafür seien die Drehoperatoren D_x, D_y, D_z definiert als Koordinatenveränderungen um einen vorgegebenen Winkel ϕ um die im Index angegebene Achse;

$$(1) \begin{pmatrix} x \\ y_{\text{neu}} \\ z_{\text{neu}} \end{pmatrix} = D_x(\phi) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y_{\text{alt}} \\ z_{\text{alt}} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y \\ z_{\text{neu}} \end{pmatrix} = D_y(\phi) \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y \\ z_{\text{alt}} \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \\ z \end{pmatrix} = D_z(\phi) \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{alt}} \\ y_{\text{alt}} \\ z \end{pmatrix}.$$

Ein solcher Operator D_x kann z. B. bestehen aus einer Koordinatentransformation der (y, z) -Ebene in Polarkoordinaten (r, θ) , einer Addition $\theta + \phi$ und einer anschließenden Rücktransformation in kartesische Koordination $(y, z)_{\text{neu}}$; in FORTRAN könnte man dazu die eindeutige Funktion $\text{ATAN2}(x, y)$ sowie die Funktionen SIN und COS verwenden. Im konkreten Anwendungsfall eines Prozessrechners wird man die mathematische Ge-

gestaltung der Drehoperatoren z. B. danach bestimmen, welche Funktionen festverdrahtet sind und schnell ablaufen. Im folgenden wird die Darstellung in Matrixform gewählt:

$$(2) \quad D_X(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} ;$$

$$D_Y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} ;$$

$$D_Z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung von Ort und Lage der Hand aus den Gelenkwinkeln:

Bei gegebenen (ξ_0, η_0, ζ_0) und gegebenen ϕ_1 bis ϕ_6 ergeben sich der Ort des Bezugspunktes (x_0, y_0, z_0) und die Lage der Hand (definiert durch 3 Winkel ψ_H, θ_H, χ_H oder durch eine Transformationsmatrix T , s. u.) aus folgenden Überlegungen:

Ausgehend von der Ruhelage des Roboters werden die Gelenke der Reihe nach um $\phi_6, \phi_5, \phi_4, \phi_3, \phi_2$ und ϕ_1 verdreht; dabei wird jeweils eine Koordinatentransformation (Drehung und evtl. Translation des Bezugspunktes) durchgeführt, so daß die ursprünglichen Koordinaten $x = \xi_0, y = \eta_0, z = \zeta_0$ Bezugspunkt P_6 in raumfeste Koordinaten x_0, y_0, z_0 mit dem Bewegungspunkt P_1 überführt werden. Die Gleichung lautet:

$$(3) \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = D_Y(\phi_1) \cdot D_X(-\phi_2) \cdot \vec{V} \quad \text{mit}$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} -as \\ 0 \\ -1_0 \end{pmatrix} + D_Z(\phi_3) \cdot \begin{pmatrix} -ae \\ au \\ 0 \end{pmatrix} + D_Y(\phi_4) \cdot \begin{pmatrix} -1_u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + D_X(\phi_5) \cdot D_Z(-\phi_6) \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix}$$

Zweckmäßigerweise wird als Bezugspunkt zunächst P_6 selbst gewählt ($\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$); eine vereinfachende Berechnung ergibt die Formel:

$$(4) \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix} = D_Y(\phi_1) \cdot D_X(-\phi_2) \cdot \begin{pmatrix} -a_s \\ 0 \\ -l_o \end{pmatrix} + D_Z(\phi_3) \cdot \begin{pmatrix} -a_e & -l_u \cdot \cos\phi_4 \\ a_u \\ l_u \cdot \sin\phi_4 \end{pmatrix}$$

Als nächster Bezugspunkt werde die Spitze eines Einheitsvektors in ξ -Richtung von P_6 aus gewählt ($\xi_0 = 1, \eta_0 = \zeta_0 = 0$); das ergibt die Formel:

$$(5) \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} = D_Y(\phi_1) \cdot D_X(-\phi_2) \cdot \begin{pmatrix} -a_s \\ 0 \\ -l_o \end{pmatrix} + D_Z(\phi_3) \cdot \begin{pmatrix} -a_e \\ a_u \\ 0 \end{pmatrix} + D_Y(\phi_4) \cdot \begin{pmatrix} -l_u + \cos\phi_6 \\ -\sin\phi_6 \cdot \cos\phi_5 \\ -\sin\phi_6 \cdot \sin\phi_5 \end{pmatrix}$$

Der Einheitsvektor selbst berechnet sich daraus zu

$$(6) \vec{E}_\xi = \begin{pmatrix} x_H - x_6 \\ y_H - y_6 \\ z_H - z_6 \end{pmatrix}.$$

Dasselbe wird durchgeführt mit dem Einheitsvektor in ζ -Richtung (Gelenk):

$$(7) \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = D_Y(\phi_1) \cdot D_X(-\phi_2) \cdot \begin{pmatrix} -a_s \\ 0 \\ -l_o \end{pmatrix} + D_Z(\phi_3) \cdot \begin{pmatrix} -a_e + \cos\phi_5 \cdot \sin\phi_4 - l_u \cdot \cos\phi_4 \\ a_u - \sin\phi_5 \\ \cos\phi_5 \cdot \cos\phi_4 + l_u \cdot \sin\phi_4 \end{pmatrix}$$

$$(8) \vec{E}_\zeta = \begin{pmatrix} x_G - x_6 \\ y_G - y_6 \\ z_G - z_6 \end{pmatrix}.$$

Führt man dasselbe auch noch mit dem Einheitsvektor in η -Richtung \vec{E}_η durch, so erhält man daraus die Transformationsmatrix

$$(9) \quad T = \begin{pmatrix} \vec{E}_\xi & \text{als Zeilenvektor} \\ \vec{E}_\eta & \text{als Zeilenvektor} \\ \vec{E}_\zeta & \text{als Zeilenvektor} \end{pmatrix}.$$

Im Anhang wird der Zusammenhang zwischen den Elementen der Matrix T und drei Lagewinkeln ψ_H , θ_H , χ_H , abgeleitet; daraus ergibt sich ein weniger rechenaufwendiger Weg zur Bestimmung von \vec{E}_η aus \vec{E}_ξ und \vec{E}_ζ .

Mit der Matrix T kann nun der raumfeste Vektor \vec{V} zu einem beliebigen Punkt (ξ, η, ζ) berechnet werden, ohne die aufwendige Gleichung (3) zu benutzen:

$$(10) \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_6 + \Delta x \\ y_6 + \Delta y \\ z_6 + \Delta z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = T^* \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt können die handfesten Koordinaten ξ, η, ζ eines beliebigen Punktes (x, y, z) bestimmt werden zu

$$(11) \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x - x_6 \\ y - y_6 \\ z - z_6 \end{pmatrix}.$$

Überlegungen zur Bestimmung der Gelenkwinkel aus Ort und Lage der Hand:

Bei gegebenem (ξ_0, η_0, ζ_0) und gegebenem (x_0, y_0, z_0) sowie T ist der Ort der Handwurzel leicht zu bestimmen:

$$(12) \quad P_6 = \begin{pmatrix} z_6 \\ y_6 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - \Delta x_0 \\ y_0 - \Delta y_0 \\ z_0 - \Delta z_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{pmatrix} = T^* \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix}.$$

Wenn man die Bestimmung von ϕ_6 zunächst einmal aufschiebt, dann ist von der Lage der Hand nur noch der Handvektor \vec{E}_ζ relevant für die Bestimmung der Gelenkwinkel ϕ_1 bis ϕ_5 .

Sehr einfach wird die Bestimmung des Winkels ϕ_4 für die Näherung $a_s = a_e = a_o = 0$, d. h. $P_1 = P_2$ und $P_3 = P_4$; dann gilt nämlich $\sin\phi_4 = (l_o^2 + l_u^2 - r_6^2)/2 l_o l_u$ mit

$$(13) \quad r_6 = \sqrt{x_6^2 + y_6^2 + z_6^2}$$

wie sich leicht ableiten läßt aus dem Dreieck $P_1 P_3 P_6$ in Abb. 2. Aus diesem Dreieck ergibt sich auch, daß P_3 um

$h = \sqrt{[(l_u + l_o)^2 - r_6^2] \cdot [r_6^2 - (l_u - l_o)^2]} / 4r_6^2$ von der Verbindungsgeraden $P_1 P_6$ entfernt ist, und zwar auf der Höhe $\sqrt{l_u^2 - h^2}$, bezogen auf P_6 . Ein wohldefinierter Kreis ist also

Bestimmungsort für P_3 . Andererseits liegt der Punkt $P_4 (=P_3)$ auf dem Unterarm, der durch P_6 gehen und zu E_ζ senkrecht stehen muß. Eine wohldefinierte Ebene ist also auch Bestimmungsort für P_3 . Um den Schnitt zwischen dieser Ebene und dem o. a. Kreis zu bestimmen, ist es zweckmäßig, ein Koordinatensystem zugrunde zu legen, in dem der Vektor $\overrightarrow{P_1 P_6}$ auf der x-Achse und damit der o. a. Kreis in der (y, z)-Ebene liegt; ein solches Koordinatensystem entsteht durch Drehung um die Winkel

$$(14) \quad \psi_6 = \text{ATAN2}(x_6, y_6) \quad \text{und} \quad \vartheta_6 = \text{ATAN2}(\sqrt{x_6^2 + y_6^2}, z_6).$$

Die o. a. Ebene erscheint dann in jeder (y, z)-Ebene als Schnittgerade, wobei die zu verschiedenen x-Werten gehörenden Schnittgeraden parallel zueinander stehen. Zu bestimmen ist also Richtung und Nullpunktstand der Schnittgeraden auf der Höhe des o. a. Kreises und daraus P_3 als ein Schnittpunkt zwischen Gerade und Kreis (Abb. 3).

Schließlich sind durch Rücktransformationen der so ermittelten Koordinaten die raumfesten Koordinaten x_3, y_3, z_3 zu ermitteln. Aus ihnen ergeben sich die Gelenkwinkel ϕ_1 und ϕ_2 . Der Gelenkwinkel ϕ_3 ergibt sich aus der Lage des Unterarms

$\overrightarrow{P_4 P_6}$ in einem auf $\overrightarrow{P_1 P_3}$ bezogenes Koordinatensystem, und ebenso ergibt sich der Gelenkwinkel ϕ_5 aus der Lage des Oberarms $\overrightarrow{P_3 P_2}$ in einem auf $\overrightarrow{P_4 P_5}$ bezogenes Koordinatensystem.

Bei Berücksichtigung der tatsächlichen Werte für a_s , a_e und a_u sind natürlich die Punkte P_1 und P_2 sowie P_3 und P_4 auseinanderzuhalten. Die o. a. Ebene als Bestimmungsort für P_4 bleibt zwar bestehen; als weiterer Bestimmungsort ergibt sich jedoch eine von einem Kreis abweichende Raumkurve, deren Bestimmung sehr schwierig wird. Deshalb wird von einer Näherung für ϕ_4 und ϕ_5 ausgegangen, so daß sich eine entsprechende Ebene als Ort für P_3 ergibt und aus einem Dreieck mit den Seitenlängen r_6 ,

$$(15) \overline{P_1 P_3} = l'_o = \sqrt{l_o^2 + a_s^2},$$

$$(16) \overline{P_3 P_6} = l'_u = \sqrt{(l_u + a_e \cdot \cos \phi_4)^2 + a_u^2}$$

nach o. a. Muster ein Kreis als weiterer Bestimmungsort für P_3 ergibt.

Berechnung von P_3 in der Ebene senkrecht zu \vec{r}_6

Für die Anschaulichkeit ist es nützlich, den Punkt P_6 als Punkt der Oberfläche einer Kugel Radius r_6 um den Koordinatenursprung P_1 zu betrachten. Wählt man der Geographie entsprechende Bezeichnungen (mit der Erdachse in z-Richtung), so sind die in Gleichung (14) bestimmten Winkel ψ_6 und ϕ_6 identisch mit geographischer Länge und Breite. In jeder Tangentialebene (mit Ausnahme derer an Nord- und Südpol) sind damit auch die Himmelsrichtungen festgelegt. In folgenden wird die Tangentialebene durch P_6 betrachtet; ein kartesisches Koordinatensystem s, p, t sei definiert mit s in Richtung Zenit, p in Richtung Osten und t in Richtung Norden. (Abb. 2 und 3)

Der das Handgelenk charakterisierende Vektor \vec{E}_ζ hat die Komponenten

$$(17) \begin{pmatrix} s \\ p \\ t \end{pmatrix} = D_Y(\phi_6) \cdot D_Z(-\psi_6) \cdot \vec{E}_\zeta.$$

Die zu \vec{E}_ζ senkrechte Ebene (d. h. die (ξ, η) -Ebene, in der auch P_4 liegt) ist gegenüber dem Radiusvektor \vec{r}_6 geneigt um

$$(18) \quad \alpha = \arcsin s$$

Die zu \vec{E}_ζ senkrechte Schnittlinie in der P_6 -Tangentialebene erscheint also in der um

$$(19) \quad l_{up} = \sqrt{l_u'^2 - h^2} \quad \text{mit } h \text{ nach Gleichung (22)}$$

tieferliegenden Ebene durch P_3 um $l_{up} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ in Richtung von \vec{E}_ζ , der Tangentialkomponente von \vec{E}_ζ (bei positivem α) versetzt. Hinzu kommt die Versetzung zwischen P_4 und P_3 um

$$(20) \quad \zeta_3 = a_u \cdot \sin \phi_5 + a_e \cdot \sin \phi_4 \cdot \cos \phi_5$$

als Abstand zwischen zwei Ebenen (durch P_4 und P_3), die als Abstand zwischen zwei Schnittgeraden mit der o. a. P_3 -Ebene noch zu dividieren ist durch $\cos \alpha$ (Abb. 4). Insgesamt ist also die zu \vec{E}_ζ senkrechte Schnittlinie zu versetzen um

$$(21) \quad d = l_{up} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \zeta_3 / \cos \alpha.$$

Die so ermittelte Gerade in der o. a. P_3 -Ebene soll nun einen Kreis vom Radius

$$(22) \quad h = (r_6/2) \sqrt{(L_+^2 - 1) \cdot (1 - L_-^2)} \quad \text{mit } L_+ = (l_u' + l_o')/r_6 \quad \text{und } L_- = (l_u' - l_o')/r_6$$

schneiden. Für $h < |d|$ ergibt sich kein Schnittpunkt, d. h. bei gegebener Lage der Hand muß der Abstand r_6 zum Koordinatenursprung verringert werden (z. B. durch Verschieben des Roboters), oder es muß eine andere Lage der Hand gewählt werden. In engen Grenzen kann auch versucht werden, durch

etwas andere (ϕ_4, ϕ_5) -Vorgaben zu erreichen, daß $h \geq |d|$ wird (vgl. die logischen Variablen im folgenden).

In der Tangentialebene durch P_6 hat die Schnittgerade der zu \vec{E}_ζ senkrechten Ebene die Himmelsrichtung (von Süd nach Osten drehend) (vgl. Abb. 3)

$$(23) \beta = \text{ATAN2}(p, t)$$

Der Fußpunkt des Lotes von P_3 auf diese Gerade hat den Abstand

$$(24) a = \sqrt{d^2 - h^2}$$

vom Kreismittelpunkt. Wählt man den rechts vom Gelenkvektor \vec{E}_ζ liegenden Fußpunkt, so erhöht sich (bei positivem d) der Wert der Himmelsrichtung des Radiusvektors auf P_3 gegenüber β um

$$(25) \gamma = \text{ATAN2}(d, a) \text{ für } (r \text{ von } g) = \text{true}$$

wählt man dagegen den Fußpunkt links vom Gelenkvektor, so ergibt sich

$$(26) \gamma = \text{ATAN2}(d, -a) \text{ für } (r \text{ von } g) = \text{false}.$$

P_3 hat also von Süden aus gezählt die Himmelsrichtung

$$(27) \delta = \beta + \gamma$$

Aus der Vorwärtsrechnung ergibt sich über die Bestimmung von P_6 und P_3 diese logische Variable zu

$$(r \text{ von } g) = \text{true für } y_3 \cdot x_6 > x_3 \cdot y_6$$

Berechnung der kartesischen Koordinaten von P_3 und P_2 sowie der Winkel ϕ_1 und ϕ_2

In der zu \vec{r}_6 senkrechten Ebene hat P_3 die Koordinaten

$$(28) \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \\ z'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_6 & -l_{up} \\ h & \sin\theta \\ -h & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} x'_3 \text{ in Richtung Zenit} \\ y'_3 \text{ in Richtung Osten} \\ z'_3 \text{ in Richtung Norden} \end{array}$$

Die Koordinaten von P_3 in raumfesten (x, y, z) -System ergeben sich durch die Transformation

$$(29) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = D_Z(\psi_6) \cdot D_Y(-\theta_6) \cdot \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \\ z'_3 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich der Gelenkwinkel ϕ_1 durch folgende Konstruktion in der (x, z) -Ebene (Abb. 5). Die Gerade von P_1 zu P_3^* , der Projektion von P_3 auf die Ebene $y=0$, ist um

$$(30) \phi_{11} = \text{ATAN2}(-x_3, z_3)$$

gegenüber der $-x$ -Achse angehoben (bei positivem ϕ_{11}). In der Normalstellung achsel = true, in der $|\phi_2|' \leq 90^\circ$ gilt, ist der Winkel

$$(31) \phi_{10} = \text{ATAN2}(a_s, \rho_3^*) \quad \text{mit} \quad \rho_3^* = \sqrt{x_3^2 + \frac{2}{3} - a_s^2}$$

zu addieren, bei stumpfen Achselwinkel (achsel = false, $|\phi_2| \geq 90^\circ$) ist dieser Winkel zu subtrahieren, um die Richtung von $\overrightarrow{P_1 P_2}$ zu erhalten:

$$(32) \phi_1 = \phi_{11} \pm \phi_{10} = \text{Elevation des Vektors } \overrightarrow{P_1 P_2} = \text{Schulterwinkel}$$

Daraus ergeben sich die Koordinaten von P_2 zu

$$(33) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_s \cdot \cos\phi_1 \\ 0 \\ a_s \cdot \sin\phi_1 \end{pmatrix}$$

Der Achselwinkel ergibt sich aus Abb. 5c zu

$$(34) \quad \phi_2 = \text{ATAN2}(\rho_3^*, -y_3).$$

Bei $x_3^2 + z_3^2 > a_s^2$, d. h. innerhalb eines Zylinders vom Radius a_s um die Schalterachse, ist P_3 nicht realisierbar; ein neuer Lösungsversuch kann dann nach Änderung der logischen Variablen r von g gemacht werden.

Berechnung des Oberarmdrehwinkels ϕ_3

Durch die Koordinatentransformation

$$(35) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = D_Y(\phi_2) \cdot D_Z(-\phi_1) \cdot \begin{pmatrix} z - z_2 \\ x - x_2 \\ y \end{pmatrix}$$

erscheinen die Punkte P_2 und P_3 als Nullpunkt in der (y', z') -Ebene in Höhe von $x'_2 = 0$, bzw. $x'_3 = -1_0$; der Punkt P_6 erhält die Koordinaten

$$(36) \quad \begin{pmatrix} x'_6 \\ y'_6 \\ z'_6 \end{pmatrix} = D_Y(\phi_2) \cdot D_Z(-\phi_1) \cdot \begin{pmatrix} z_6 - z_2 \\ x_6 - x_2 \\ y_6 \end{pmatrix}$$

und damit den Abstand

$$(37) \quad \rho_6^* = \sqrt{y_6'^2 + z_6'^2}$$

von der durch P_2 und P_3 gehenden Oberarmachse (x' -Achse). Aus Abb. 6 a und b sind der Winkel

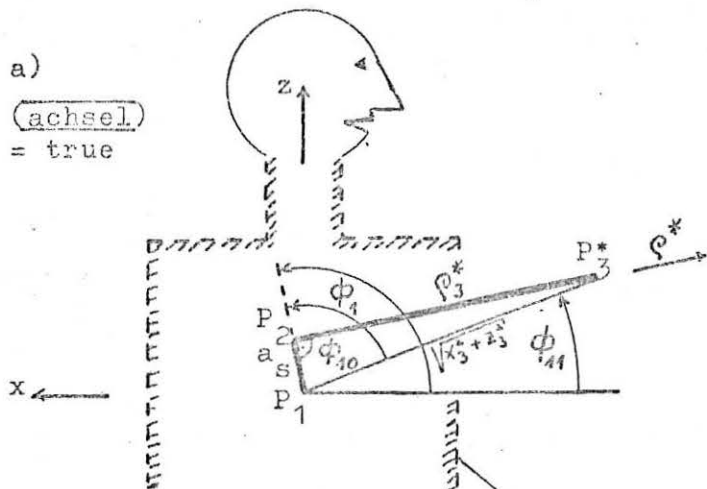
$$(38) \quad \phi_0 = \text{ATAN2}(y'_6, z'_6)$$

zwischen der (P_2P_3) -Projektion und der y' -Achse sowie der Winkel

$$(39) \quad \epsilon = \text{ATAN2}(\sqrt{\rho_6^{*2} - a_u^2}, \pm a_u)$$

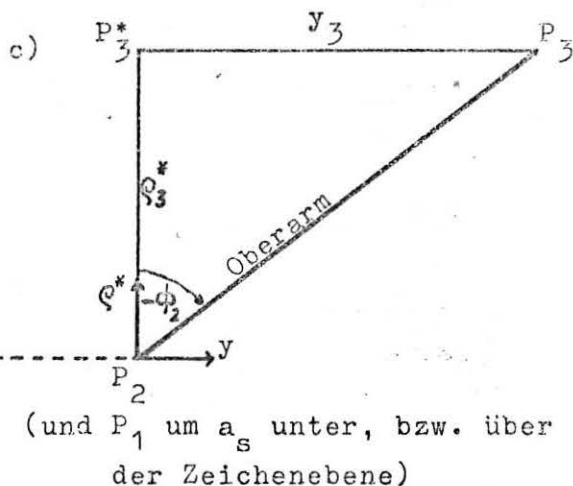
a)

(achsel)
= true



aus a und b)

$$\varrho_3^* = \sqrt{x_3^2 + z_3^2} - a_s$$



b)

(achsel)
= false

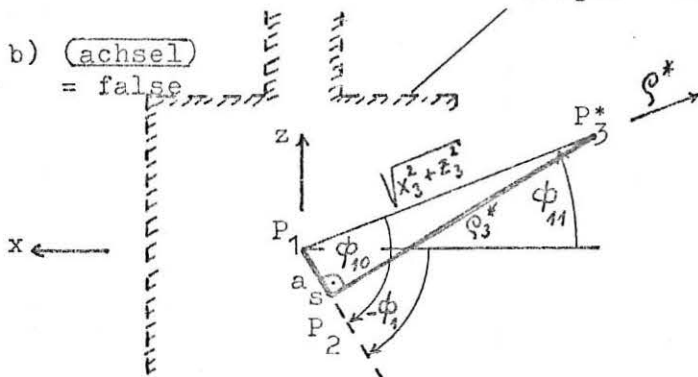


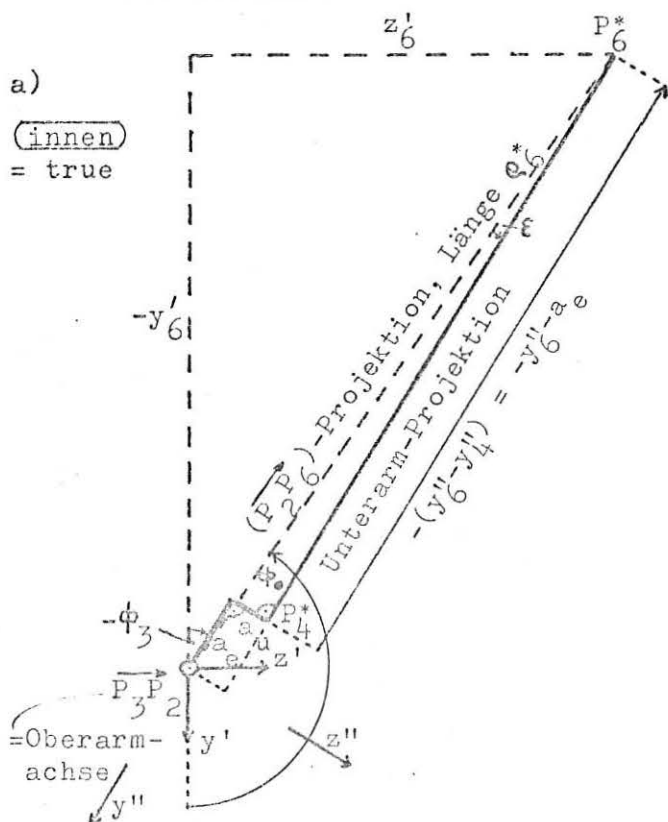
Abb. 5 Bestimmung der Winkel ϕ_1 und ϕ_2 aus $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$.

a und b) Bestimmung von ϱ_3^* und ϕ_1 aus $P_3^* = (x_3, 0, z_3)$ für $|\phi_2| \leq 90^\circ$ (a) und für $|\phi_2| > 90^\circ$ (b).

c) Bestimmung von ϕ_2 aus P_3 und ϱ_3^* .

a)

(innen)
= true



b)

(innen)
= false

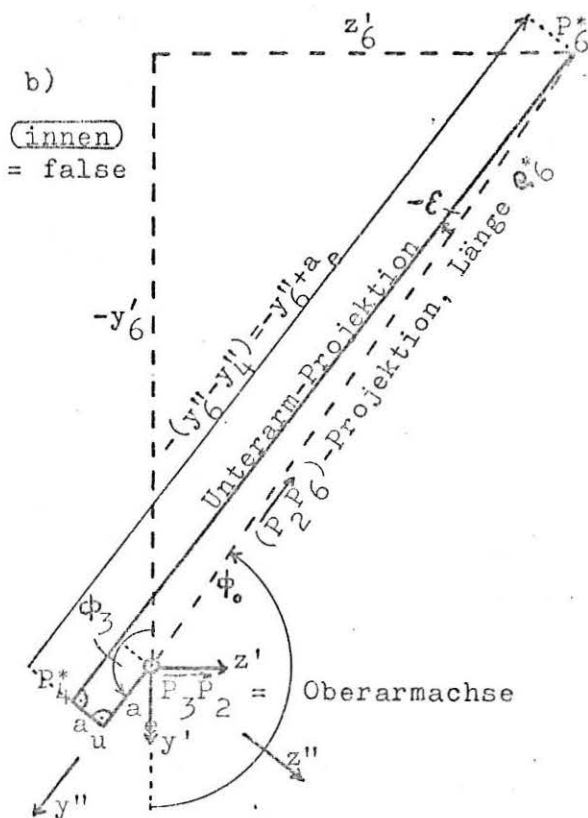


Abb. 6 Bestimmung des Winkels ϕ_3 in einer zu $\overrightarrow{P_3P_2}$ senkrechten Ebene,

a) mit Ellbogenwinkel $|\phi_4| = 90^\circ$, b) mit nach außen hinübergedrehtem ϕ_4 .

P_6^* und P_4^* sind die Projektionen von P_6 und P_4 auf die Zeichenebene.

zwischen der (P_2P_6)-Projektion und der Unterarm-Projektion abzuleiten. Dabei ist in Gleichung (39) das positive Vorzeichen zu wählen, wenn innen = true gilt (Abb. 6a), und das negative Vorzeichen für innen = false (Abb. 6b). Daraus ergibt sich

$$(40) \quad \phi_3 = \phi_0 - (180^\circ - \epsilon)$$

Die Funktionen (36) und (38) werden zweckmäßigerweise zusammengefaßt zu einer im Folgenden noch wiederzuverwendenden Funktion

$$(41) \quad \text{Drehwinkel } \phi(\vec{v}, \theta, \psi) = \text{ATAN2}(v_2, v_3) \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = D_Y(\theta) \cdot D_Z(-\psi) \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Berechnung des Ellbogenwinkels ϕ_4

Die weitere Koordinatentransformation

$$(42) \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = D_X(-\phi_3) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ergibt $z''_2 = z''_3 = 0$ und $z''_4 = z''_6 = \bar{a}_u$ sowie $y''_2 = y''_3 = 0$ und $y''_4 = \bar{a}_e$ und

$$(43) \quad y''_6 = y'_6 \cdot \cos \phi_3 + z'_6 \cdot \sin \phi_3;$$

die x' -Komponente bleibt unverändert, (vgl. Abb. 6) und mit $x'_4 = -l_0$ und $y'_4 = \bar{a}_e$ ergibt sich daraus der Ellbogenwinkel zu

$$(44) \quad \phi_4 = \text{ATAN2}(y''_4 - y''_6, x'_4 - x'_6) = \text{ATAN2}(\bar{a}_e - y''_6, x'_4 + l_0).$$

An dieser Stelle kann durch Vergleich der Strecke

$$(45) \quad \rho_{46} = \sqrt{(\bar{a}_e - y''_6)^2 + (x'_4 + l_0)^2}$$

mit der Unterarmlänge l_u entschieden wurden, ob mit einer

besseren Näherung für l'_u die Rechnung ab Gleichung (19) wiederholt werden soll, indem die bisherige Größe l'_u um den Faktor l_u/ρ_{46} verändert wird.

Berechnung des Unterarm-Drehwinkels ϕ_5

Das Koordinatensystem x, y, z wird im Azimut um ψ_{46} und im der Elevation der x -Achse um θ_{46} gedreht, so daß die neue x -Achse mit der Richtung $\overrightarrow{P_6 P_4}$ zusammenfällt. Dazu ist zunächst P_4 aus den nun vorliegenden Werten für ϕ_1 bis ϕ_4 zu ermitteln:

$$(46) \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} = D_Y(\phi_1) \cdot D_X(-\phi_2) \cdot \begin{pmatrix} -a_s & -a_e \cdot \cos\phi_3 & -a_u \cdot \sin\phi_3 \\ & a_u \cdot \cos\phi_3 & -a_e \cdot \sin\phi_3 \\ & & -1_0 \end{pmatrix}$$

Die Winkel ψ_{46} und θ_{46} sind dabei bestimmt durch

$$(47) \psi_{46} = \text{ATAN2}(x_4 - x_6, y_4 - y_6); \theta_{46} = \text{ATAN2}(\sqrt{(x_4 - x_6)^2 + (y_4 - y_6)^2}, z_4 - z_6)$$

In diesem Koordinatensystem werden die Vektoren $\vec{-E_\zeta}$ und

$$(48) \vec{V}_{32} = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 \\ z_3 - z_2 \end{pmatrix}$$

bezüglich ihres Winkels um die x -Achse miteinander vergleichen. Durch Einsetzen von $\theta = \theta_{46}$ und $\psi = \psi_{46}$ ergibt sich

$$(49) \phi_{51} = \text{Drehwinkel}(\vec{-E_\zeta}, \theta_{46}, \psi_{46}) \text{ und } \phi_{50} = \text{Drehwinkel}(\vec{V}_{32}, \theta_{46}, \psi_{46}).$$

Da der Unterarm-Drehwinkel definiert ist als die Drehung des Gelenkvektors $\vec{E_\zeta}$ um die $+x$ -Achse, d. h. die Achse von P_6 nach P_4 , im Vergleich zur normalen Unterarm-Richtung $\overrightarrow{P_3 P_2}$, die zu vergleichenden Größen also im Normalfall (innen = true) beide um 180° verändert sind, ergibt sich,

$$(50) \phi_5 = \phi_{51} - \phi_{50} \text{ für } \text{innen} = \text{true}; \phi_5 = (\phi_{51} - 180^\circ) - \phi_{50} \text{ für } \text{innen} = \text{false}.$$

Berechnung des Handgelenkwinkels ϕ_6 :

Der Handgelenkwinkel ist definiert als Winkel zwischen ξ -Achse (entgegengesetzt zur Richtung der Finger) und Unterarm (Richtung $\overrightarrow{P_6 P_4}$), er kann also auch betrachtet werden als Richtung des Unterarms im handfesten (ξ, η, ζ) -System. Nach Gleichung (11) ergibt sich

$$(51) \quad \begin{pmatrix} \xi_4 \\ \eta_4 \\ \zeta_4 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x_4 & -x_6 \\ y_4 & -y_6 \\ z_4 & -z_6 \end{pmatrix}.$$

Der Drehwinkel des Unterarm um die ζ -Achse gegenüber $\xi = 0$ beträgt

$$(52) \quad \phi_6 = \text{ATAN2}(\xi_4, \eta_4);$$

das ist auch der Drehwinkel der ξ -Achse um die $-\zeta$ -Achse gegenüber $\overrightarrow{P_6 P_4}$.

Näherung für ϕ_4 und ϕ_5 :

Bei kontinuierlicher Bewegung des Roboters empfiehlt es sich, die jeweils vorhergehenden Werte ϕ_4 und ϕ_5 den Gleichungen (16) und (20) zugrundegelegt. Für einen Ausgangsort empfiehlt sich eine Rechnung mit $a_s = a_e = a_u = 0$. Dann ergibt sich:

$$(53) \quad \phi_4 = \arcsin((l_o^2 + l_u^2 - r_6^2)/2 l_o l_u) \text{ mit } r_6 \text{ nach Gl. (13),}$$

$$(54) \quad h = \sqrt{(l_u + l_o)^2 - r_6^2} \cdot r_6 - (l_u - l_o)^2 / 4r_6^2},$$

$$(55) \quad d = \sqrt{l_u^2 - h^2} \cdot s / \sqrt{1 - s^2} \text{ mit } s \text{ nach Gleichung (14) und (17),}$$

$$(56) \quad a = -\sqrt{h^2 - d^2} \text{ für } (r \text{ von } g) = \text{true}, a = \sqrt{h^2 - d^2} \text{ für } (r \text{ von } g) = \text{false}$$

und aus Abb. 5 durch zwei Drehungen des Koordinatensystems, so

daß P_1 hinter P_3 zu liegen kommt, als Winkel zwischen den Projektionen von \vec{E}_ζ und $\overrightarrow{P_3 P_1}$

$$(57) \quad \phi_5 \left(+180^\circ \text{ bei } \boxed{\text{innen}} = \text{false} \right) = \text{ATAN2} \left(-d/\sqrt{1-s^2}, a \cdot \sqrt{1-(a/l_u)^2} \right).$$

Anhang A Beziehung zwischen der Matrix T und drei Lagewinkeln

ψ_H, θ_H, χ_H

Will man die Lage der Hand statt durch T durch 3 Winkel charakterisieren, so bietet sich dafür folgende Definition an: Der Vektor \vec{E}_ξ hat das Azimut ψ_H und die Elevation θ_H . Dreht man das Koordinatensystem x, y, z um ψ_H um die z-Achse und dann um θ_H um die (-y)-Achse, dann fällt die x-Achse mit der ξ -Achse zusammen, die y-Achse verbleibt zunächst noch in der horizontalen Ebene; in diesem neuen (x, y, z)-System liegt nun zwischen dem Vektor \vec{E}_η und der y-Achse ein weiterer Elevationswinkel χ_H , der durch eine zusätzliche Drehung des x, y, z-Koordinatensystems um die x-Achse zu Null wird. Aus dieser Konstruktion ergibt sich die Formel

$$(A1) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = D_z(\psi_H) \cdot D_y(-\theta_H) \cdot D_x(\chi_H) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

Die Matrix T läßt sich also auch berechnen durch Gleichsetzung der Operatoren

$$(A2) T = D_z(\psi_H) \cdot D_y(-\theta_H) \cdot D_x(\chi_H),$$

indem die Drehoperationen mit den drei Einheitsvektoren \vec{E}_ξ , \vec{E}_η , \vec{E}_ζ durchgeführt werden:

$$(A3) T = \begin{pmatrix} \cos\theta_H \cdot \cos\psi_H & \cos\theta_H \cdot \sin\psi_H & \sin\theta_H \\ -\sin\chi_H \cdot \sin\theta_H \cdot \cos\psi_H - \cos\chi_H \cdot \sin\psi_H & -\sin\chi_H \cdot \sin\theta_H \cdot \sin\psi_H + \cos\chi_H \cdot \cos\psi_H & \sin\chi_H \cdot \cos\theta_H \\ -\cos\chi_H \cdot \sin\theta_H \cdot \cos\psi_H + \sin\chi_H \cdot \sin\psi_H & -\cos\chi_H \cdot \sin\theta_H \cdot \sin\psi_H - \sin\chi_H \cdot \cos\psi_H & \cos\chi_H \cdot \cos\theta_H \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich als Umkehrung:

$$(A4) \sin\theta_H = T_{13}$$

$$(A5) \quad \cos \theta_H = \sqrt{T_{11}^2 + T_{12}^2} \quad (\text{stets positiv durch Definition des Elevationswinkels } \theta_H) \text{ und für } \cos \theta \neq 0:$$

$$(A6) \quad \sin \psi_H = T_{12} / \cos \theta_H,$$

$$(A7) \quad \cos \psi_H = T_{11} / \cos \theta_H,$$

$$(A8) \quad \sin \chi_H = T_{23} / \cos \theta_H \quad \text{oder}$$

$$(A9) \quad \sin \chi_H = T_{31} \cdot \sin \psi_H - T_{32} \cdot \cos \psi_H$$

$$(A10) \quad \cos \chi_H = T_{33} / \cos \theta_H.$$

Aus der Gleichung A4 bis A7 sowie A9 und A10 lassen sich also die Winkel ψ_H , θ_H und χ_H bestimmen, ohne daß \vec{E}_η bekannt ist (vgl. Gleichung 9); daraus ergibt sich die Möglichkeit der Berechnung von \vec{E}_η über Gleichung (A3).

Für $\cos \theta_H = 0$ ($\sin \theta_H = \pm 1$) ergibt sich dagegen:

$$T_{60} = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & & 0 & & \pm 1 \\ \bar{+} \sin \chi_H & \cos \psi_H - \cos \chi_H \sin \psi_H & \bar{+} \sin \chi_H & \sin \psi_H + \cos \chi_H \cos \psi_H & 0 \\ \bar{+} \cos \chi_H & \cos \psi_H + \sin \chi_H \sin \psi_H & \bar{+} \cos \chi_H & \sin \psi_H - \sin \chi_H \cos \psi_H & 0 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & & 0 & & \pm 1 \\ \bar{+} \sin(\chi_H \pm \psi_H) & \cos(\chi_H \pm \psi_H) & & & 0 \\ \bar{+} \cos(\chi_H \pm \psi_H) & -\sin(\chi_H \pm \psi_H) & & & 0 \end{array} \right), \text{ d. h. also}$$

$$\sin(\chi_H + T_{13} \cdot \psi_H) = -T_{32}$$

$$\cos(\chi_H + T_{13} \cdot \psi_H) = -T_{13} \cdot T_{31}$$

Einer der Winkel ψ_H und χ_H ist also frei wählbar, z. B. $\psi_H = 0$.

Anhang B Begrenzung von Ort und Lage der Hand

Anknüpfend an die Gleichung 21 und 22 wurde festgestellt, daß $h > |d|$ sein muß. Ist das nicht der Fall, dann müssen die Eingangswerte \vec{r}_6 , ψ_H , θ_H , χ_H variiert werden. Um dabei dem Anwendungsfall entsprechend übersichtlich vorzugehen, ist es zweckmäßig, nur einen Eingangswert soweit zu verändern, daß die Bedingung $h > |d|$ erfüllt wird.

Nimmt man $|d|$ als gegeben an und setzt $h = |d| \cdot (1 + \epsilon)$ mit $\epsilon \ll 1$, aber $\neq 0$, z. B. $\epsilon = 10^{-6}$, um Rundungsfehler des Computers zu berücksichtigen), so läßt sich daraus ein neuer Wert für r_6 berechnen. Aus Abb. 2 ergibt sich

$$(B1) \quad r_6 = \sqrt{l_o'^2 - h^2} + \sqrt{l_u'^2 - h^2},$$

wenn der Fußpunkt von P_3 nicht außerhalb der Strecke $P_1 P_6$ liegt; dabei haben beide Wurzeln positives Vorzeichen. Der Sonderfall, daß die kleinere der beiden Wurzeln ein negatives Vorzeichen erhält, so daß P_3 außerhalb der Strecke $P_1 P_6$ liegt, sei hier nicht weiter betrachtet. Den neuen Ort der Handwurzel erhält man also durch

$$(B2) \quad \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix}_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix}_{\text{alt}} \cdot \frac{\sqrt{l_o'^2 - (1 + \epsilon)^2 \cdot d^2} + \sqrt{l_u'^2 - (1 + \epsilon)^2 \cdot d^2}}{r_6 \text{ alt}}$$

Mit dieser Formel wird der Ort der Hand begrenzt durch die vorgegebene Lage der Hand. Will man dagegen die Hand weiter ausstrecken und nimmt dabei Lageänderungen in Kauf, so bietet es sich an, anstelle von Gleichung (24) $\alpha = 0$ (d. h. $\gamma = \pm 90^\circ$) zu setzen; damit wird die Lageabweichung vom vorgegebenen Wert am geringsten. Die sich daraus ergebenden neuen Werte für ψ_H , θ_H und χ_H sind durch die Vorwärts-Rechnung zu ermitteln. Bei dieser Vorgehensweise ergibt sich bei $d = h$ eine Unstetigkeit in der Bewegung:

Beim Ausstrecken des Armes über die Grenze $h = d$ hinweg wird die Ellbogenbewegung bis zu dieser Grenze immer schneller und bleibt dann abrupt bei $\delta = \beta \pm 90^\circ$ stehen; d. h. beim Versuch, diese Bewegung rückwärts ablaufen zu lassen, würde der Ellbogen plötzlich stark ausschlagen. Aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, eine kleine Abweichung schon im Bereich $(1 - \epsilon) \cdot h < |d| < h$ zuzulassen, um den Differentialquotienten $\partial d / \partial h(r_6)$ zu begrenzen, z. B. durch folgende Funktion (Abb. B1)

$$a = \text{sign}(d) \cdot (h - |d| \cdot (1 - \epsilon)) / \sqrt{\epsilon \cdot (2 - \epsilon)} \quad \text{für } (1 - \epsilon) \cdot h < |d| < h,$$

$$a = \text{sign}(d) \cdot (h \cdot \sqrt{(\epsilon / (2 - \epsilon)) + 1} - |d|) \quad \text{für } h < |d| < h \cdot \sqrt{(\epsilon \cdot (2 - \epsilon)) + 1},$$

$$a = 0 \quad \text{für } h \cdot \sqrt{(\epsilon / (2 - \epsilon)) + 1} < |d|.$$

Diese Funktion ermöglicht durch einen sanften Anstieg außerhalb der Grenze $|d| = h$ eine rechtzeitige Erkennung der Bewegungsrichtung, die ja durch die logische Variable (r von g) bestimmt wird. Die Vergrößerung der Soll-Ist-Abweichung der Handlage durch diese Funktion ist kleiner als der Faktor $\epsilon/4$.

Will man jedoch nur einen der Lagewinkel ψ_H , θ_H , χ_H variieren, so stellt sich zunächst die Frage, welcher der drei Lagewinkel am effektivsten die erwünschte Wirkung zeigt. Über die Gleichungen (A3), (9), (17), (18) und (21) sind alle drei Winkel in d enthalten, und zwar über die Größe (Berechnung siehe unten):

$$(E3) \quad s = [-\cos\chi_H \cdot \sin\theta_H \cdot \cos(\psi_H - \psi_6) + \sin\chi_H \cdot \sin(\psi_H - \psi_6)] \cdot \cos\theta_6 + \cos\chi_H \cdot \cos\theta_H \cdot \sin\theta_6.$$

Die partielle Ableitung dieser Größe nach ψ_H , θ_H und χ_H ergibt:

$$(B4) \quad \frac{\partial s}{\partial \psi_H} = [+ \sin(\psi_H - \psi_6) \cdot \cos\chi_H \cdot \sin\theta_H + \cos(\psi_H - \psi_6) \cdot \sin\chi_H] \cdot \cos\theta_6,$$

$$(B5) \quad \frac{\partial s}{\partial \theta_H} = \left[-\cos \theta_H \cdot \cos(\psi_H - \psi_6) \cdot \cos \theta_6 - \sin \theta_H \cdot \sin \theta_6 \right] \cdot \cos \chi_H,$$

$$(B6) \quad \frac{\partial s}{\partial \chi_H} = \sin \chi_H \cdot \left[+\sin \theta_H \cdot \cos(\psi_H - \psi_6) \cdot \cos \theta_6 - \cos \theta_H \cdot \sin \theta_6 \right] + \cos \chi_H \cdot \sin(\psi_H - \psi_6) \cdot \cos \theta_6$$

Rechnet man diese drei Ableitungen mit den alten Werten ψ_H , θ_H , χ_H sowie ψ_6 und θ_6 aus, so kann man durch Vergleich der Ergebnisse feststellen, durch welche Variation die Größe 5 am meisten beeinflusst wird. Danach bestimmt man die neue Lage durch die entsprechende der drei folgenden Gleichungen:

$$(B7) \quad \psi_H = \arccos\left(\frac{c+s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + \psi_O + \psi_6 \text{ mit } \cos \psi_O = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \psi_O = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ sowie}$$

$$a = -\cos \chi_H \cdot \sin \theta_H \cdot \cos \theta_6, \quad b = \sin \chi_H \cdot \cos \theta_6 \text{ und } c = -\cos \chi_H \cdot \cos \theta_H \cdot \sin \theta_6.$$

$$(B8) \quad \theta_H = \arccos\left(\frac{c+s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + \theta_O \text{ mit } \cos \theta_O = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \theta_O = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ sowie}$$

$$a = \cos \chi_H \cdot \sin \theta_6, \quad b = -\cos \chi_H \cdot \cos(\psi_H - \psi_6) \cdot \cos \theta_6 \text{ und } c = -\sin \chi_H \cdot \sin(\psi_H - \psi_6) \cdot \cos \theta_6.$$

$$(B9) \quad \chi_H = \arccos\left(\frac{c+s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + \chi_O \text{ mit } \cos \chi_O = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \chi_O = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ sowie}$$

$$a = -\sin \theta_H \cdot \cos(\psi_H - \psi_6) \cdot \cos \theta_6 + \cos \theta_H \cdot \sin \theta_6, \quad b = \sin(\psi_H - \psi_6) \cdot \cos \theta_6 \text{ und } c = 0.$$

Die Werte a und b sind die Koeffizienten des Cosinus und des Sinus des gesuchten Winkels $(\psi_H - \psi_6)$, θ_H oder χ_H in Gleichung (B3), welche durch Normierung auf folgende Form gebracht wurde:

$$(B10) \quad \cos(\phi - \phi_O) = \cos \phi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \phi_O\right) + \sin \phi \cdot \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \phi_O\right) = \frac{c+s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Daraus ist erkennbar, daß das Vorzeichen von $\sqrt{a^2+b^2}$ durchgängig positiv (oder durchgängig negativ) zu wählen ist. Für die Größe s wird ein neuer Wert nach folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(B11) \quad d = (1 - \varepsilon) \cdot h$$

$$(B12) \quad d \cdot \cos \alpha - l_{up} \cdot \sin \alpha = \zeta_3 \quad (\text{aus Gleichung 21})$$

$$(\sin \alpha_O = d/c) \cdot \cos \alpha - (\cos \alpha_O = l_{up}/c) \cdot \sin \alpha = -\sin(\alpha - \alpha_O) = \zeta_3/c \quad \text{mit } c = \sqrt{d^2 + l_{up}^2},$$

$$(B13) \quad s = \sin \alpha = \sin \alpha_O \cdot \cos(\alpha - \alpha_O) + \cos \alpha_O \cdot \sin(\alpha - \alpha_O) = (d/c) \cdot \sqrt{1 - (\zeta_3/c)^2} - (l_{up}/c) \cdot (\zeta_3/c)$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist zu bestimmen nach dem alten Wert für $s + (l_{up}/c) \cdot (\zeta_3/c)$.

Das Argument der arccos-Funktion muß zwischen -1 und +1 liegen, d. h.

$$(B14) \quad (s+c)^2 \leq a^2 + b^2;$$

sonst ist das Problem durch Lageänderung des gewählten Winkels nicht lösbar. Die Vieldeutigkeit der arccos-Funktion ist so aufzulösen, daß die Differenz $\theta_{Hneu} - \theta_{Halt}$, $\psi_{Hneu} - \psi_{Halt}$ oder $\chi_{Hneu} - \chi_{Halt}$ möglichst klein wird.

Berechnung von Gleichung (B3) aus (A1) und (17):

$$(B15) \begin{pmatrix} s \\ p \\ t \end{pmatrix} = D_Y(\theta_6) \cdot D_Z(-\psi_6) \cdot D_Z(-\psi_H) \cdot D_Y(-\theta_H) \cdot D_X(\chi_H) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\chi_H \\ \cos\chi_H \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\cos\chi_H \cdot \sin\theta_H \\ -\sin\chi_H \\ \cos\chi_H \cdot \cos\theta_H \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\cos\chi_H \cdot \sin\theta_H \cdot \cos(\psi_H - \psi_6) + \sin\chi_H \cdot \sin(\psi_H - \psi_6) \\ \dots\dots\dots \\ \cos\chi_H \cdot \cos\theta_H \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s = [-\cos\chi_H \cdot \sin\theta_H \cdot \cos(\psi_H - \psi_6) + \sin\chi_H \cdot \sin(\psi_H - \psi_6)] \cdot \cos\theta_6 + \cos\chi_H \cdot \cos\theta_H \cdot \sin\theta_6 \\ p = \dots\dots\dots \\ t = \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

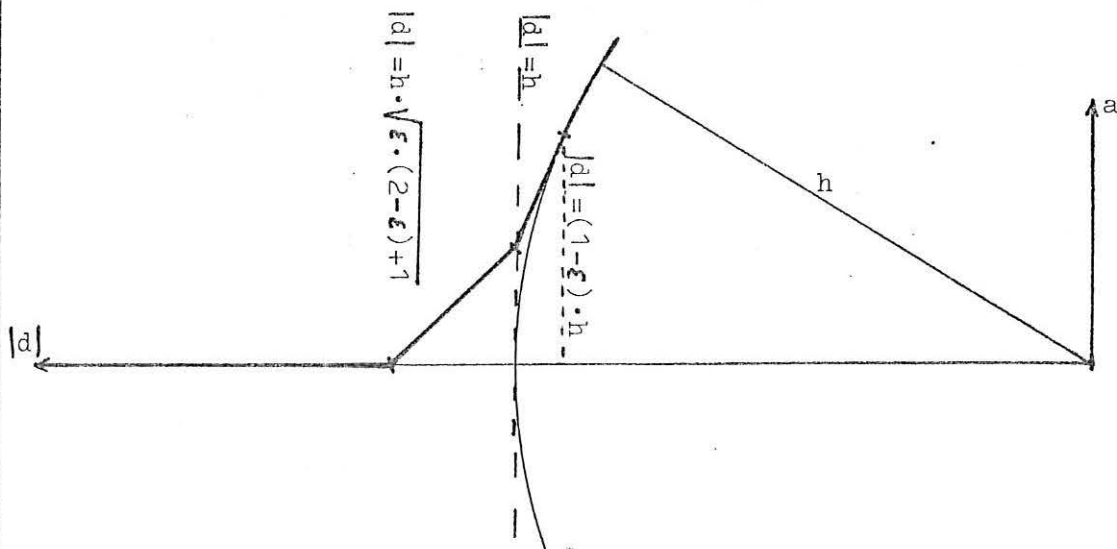


Abb. B1 Näherungswerte der Größe a anstelle von Gl. (24), falls die gewünschte Lage der Hand ein $|d| > (1-\epsilon) \cdot h$ zur Folge haben würde. Es wird die stark ausgezogene Linie gewählt, um eine unstetige Bewegung bei $|d| = h$ zu vermeiden.